Γραμμικη Αλγεβρα II

Ασκησεισ - Φυλλαδιο 4

Διδασκοντεσ: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθοσ Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματοσ:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

2 - 5 - 2012

Άσκηση 1. *Βρείτε τα ελάχιστα πολυώνυμα των ακόλουθων πινάκων πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Λύση. *Για το πίνακα A έχουμε:*

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -5-t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3-t & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-t & -4 \\ 4 & -5-t \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3-t & -2 \\ 2 & -1-t \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-1)^2$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$, και άρα τα πιθανά ελάχιστα είναι τα ακόλουθα:

$$(t+1)(t-1), \ (t+1)^2(t-1), \ (t+1)(t-1)^2, \ (t+1)^2(t-1)^2$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε ποιο από τα παρακάτω γινόμενα δίνει το μηδενικό πίνακα: $(A+I_4)(A-I_4)$, $(A+I_4)^2(A-I_4)$, $(A+I_4)(A-I_4)^2$, $(A+I_4)^2(A-I_4)^2$. *Εύκολα βρίσκουμε ότι*

$$(A+I_4)(A-I_4) \neq \mathbb{O}, \qquad (A+I_4)^2(A-I_4) \neq \mathbb{O}, \ (A+I_4)(A-I_4)^2 \neq \mathbb{O}$$

Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το

$$Q_A(t) = (t+1)^2(t-1)^2$$

Πραγματικά:

$$(A+I_4)^2(A-I_4)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^2 = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

δηλαδή το $(t+1)^2(t-1)^2$ μηδενίζει τον πίνακα A και είναι το κανονικό πολυώνυμο με τον μικρότερο βαθμό το οποίο μηδενίζει τον πίνακα A. Επομένως το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι $Q_A(t) = (t+1)^2(t-1)^2$.

Για το πίνακα B έχουμε:

$$P_B(t) = \begin{vmatrix} 4-t & 0 & -1 \\ 0 & 4-t & -1 \\ -1 & -1 & 5-t \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 4-t & 0 & -1 \\ -(4-t) & 4-t & 0 \\ -1 & -1 & 5-t \end{vmatrix} = (4-t) \begin{vmatrix} 4-t & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 5-t \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_3} (4-t) \begin{vmatrix} 4-t & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 5-t \\ -1 & -1 & 5-t \end{vmatrix} = (4-t) \begin{vmatrix} 4-t & -1 \\ -2 & 5-t \end{vmatrix} = (4-t)(t^2-9t+18) = (4-t)(t-3)(t-6)$$

Συνεπώς, αφού το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_B(t)$ έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_B(t)$ έπεται ότι $Q_B(t) = (4-t)(t-3)(t-6)$. $\square$

Άσκηση 2. *Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

και στη συνέχεια με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton να υπολογίσετε τον πίνακα

$$B = A^{23} - 3A^{22} - 4A^{21} + 10A^{20} - A^6 + 3A^5 + 4A^4 - 11A^3 + 4A^2 + 5A + I_3$$

Λύση. *Εύκολα βρίσκουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ είναι*

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ -1 & -t & 4 \\ 0 & 2 & 2-t \end{vmatrix} = \cdots = -t^3 + 3t^2 + 4t - 10$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$R(t) = t^{23} - 3t^{22} - 4t^{21} + 10t^{20} - t^6 + 3t^5 + 4t^4 - 11t^3 + 4t^2 + 5t + 1$$

Διαιρώντας το πολυώνυμο $R(t)$ με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ θα έχουμε:

$$R(t) = P_A(t)(-t^{20} + t^3 + 1) + (t^2 + t + 11) \qquad (*)$$

Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε ότι $P_A(A) = 0$. Επομένως, από τη σχέση $(*)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} B = R(A) &= P_A(A)(-A^{20} + A^3 + I_3) + (A^2 + A + 11I_3) \\ &\Longrightarrow B = A^2 + A + 11I_3 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 20 \\ -2 & 17 & 9 \\ -2 & 6 & 25 \end{pmatrix} \qquad \square$$

Άσκηση 3. *Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton να εκφράσετε τον αντίστροφο του πίνακα*

$$B = A^4 + 5A^3 - 48A^2 - I_2$$

με τη μορφή $\kappa A + \lambda I_2,\ \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση. *Έχουμε:*

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -5 \\ -1 & 3-t \end{vmatrix} = (2-t)(3-t) - 5 = t^2 - 5t + 1$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $R(t) = t^4 + 5t^3 - 48t^2 - 1$ *και εκτελούμε τη διαίρεση του* $R(t)$ *με το* $P_A(t)$*:*

$$R(t) = P_A(t)(t^2 + 10t + 1) + (-5t - 2)$$

Επομένως, από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε:

$$B = R(A) = P_A(A)(A^2 + 10A + I_2) + (-5A - 2I_3) = -5A - 2I_2$$

Επομένως:

$$B = \begin{pmatrix} -12 & 25 \\ 5 & -17 \end{pmatrix}$$

Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B. *Έχουμε:*

$$P_B(t) = \begin{vmatrix} -12-t & 25 \\ 5 & -17-t \end{vmatrix} = (-12-t)(-17-t) - 125 = t^2 + 29t + 79$$

Συνεπώς από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε:

$$\begin{aligned} P_B(B) = 0 &\implies B^2 + 29B + 79I_2 = 0 \\ &\implies B(B + 29I_2) = -79I_2 \\ &\implies B(-\frac{1}{79}(B + 29I_2)) = I_2 \\ &\implies B^{-1} = -\frac{1}{79}(B + 29I_2) \\ &\implies B^{-1} = -\frac{1}{79}(-5A - 2I_2 + 29I_2) \\ &\implies B^{-1} = \frac{5}{79}A - \frac{27}{29}I_2 \end{aligned}$$

Άρα εκφράσαμε τον αντίστροφο του πίνακα B *στη μορφή* $\kappa A + \lambda I_2$, *όπου* $\kappa = \frac{5}{79}$ *και* $\lambda = -\frac{27}{29}$. □

Άσκηση 4. *Έστω* A *ένας* 2×2 *πίνακας με στοιχεία από το* $\mathbb{R}$, *και έστω* k *ένας φυσικός αριθμός,* $k > 2$. *Με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton να αποδείξετε ότι*

$$A^k = 0 \implies A^2 = 0$$

Λύση. *Θεωρούμε το πολυώνυμο* $R(t) = t^k$. *Τότε από υπόθεση έπεται ότι* $R(A) = A^k = 0$. *Συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο* $Q_A(t)$ *του πίνακα* A *διαιρεί το πολυώνυμο* $g(t)$ *και άρα* $Q_A(t) = t^n$ *όπου* $1 \leq n \leq k$. *Όμως ο βαθμός του* $Q_A(t)$ *δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος του* 2 *διότι* $Q_A(t)/P_A(t)$ *και* $\deg P_A(t) = 2$. *Άρα έχουμε ότι* $1 \leq n \leq 2$. *Αν* $n = 1$ *τότε* $Q_A(t) = t$ *και από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε*

$$Q_A(A) = 0 \implies A = 0 \implies A^2 = 0$$

που είναι η τετριμμένη περίπτωση.

Αν $n = 2$ *τότε* $Q_A(t) = t^2$ *και από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έπεται ότι*

$$Q_A(A) = 0 \implies A^2 = 0$$

και έτσι έχουμε το ζητούμενο. □

Άσκηση 5. *Έστω* $R(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k$ *ένα πολυώνυμο υπεράνω του* $\mathbb{K}$ *με* $a_0 \neq 0$.

(1) *Έστω* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση, όπου* $\mathcal{E}$ *είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του* $\mathbb{K}$. *Αν* $R(f) = 0$, *δείξτε ότι η* f *είναι ισομορφισμός. Να υπολογισθεί η* f^{-1}.

(2) *Αν* $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *και* $R(A) = 0$, *δείξτε ότι ο* A *είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον* A^{-1}.

Λύση. *Συμβολίζουμε με* $I_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *την ταυτοτική απεικόνιση στον* $\mathcal{E}$. *Αφού* $a_0 \neq 0$ *έχουμε:*

$$\begin{aligned} R(f) &= a_0 \mathrm{I}_{\mathcal{E}} + a_1 f + \cdots + a_k f^k = 0 \\ &\Longrightarrow a_1 f + \cdots + a_k f^k = -a_0 I_{\mathcal{E}} \\ &\Longrightarrow f \circ (a_1 I_{\mathcal{E}} + \cdots + a_k f^{k-1}) = -a_0 I_{\mathcal{E}} \\ &\Longrightarrow f \circ (-\frac{a_1}{a_0} I_{\mathcal{E}} - \cdots - \frac{a_k}{a_0} f^{k-1}) = I_{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

Παρόμοια θα έχουμε: $(-\frac{a_1}{a_0} I_{\mathcal{E}} - \cdots - \frac{a_k}{a_0} f^{k-1}) \circ f = I_{\mathcal{E}}$.

Άρα η γραμμική απεικόνιση f *είναι ισομορφισμός με*

$$f^{-1} = -\frac{a_1}{a_0} I_{\mathcal{E}} - \cdots - \frac{a_k}{a_0} f^{k-1}$$

Όμοια δουλεύουμε στη περίπτωση του ερωτήματος (2). $\square$

Άσκηση 6. *Έστω ο* $n \times n$ *πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(1) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας* $\frac{1}{n}A$ *είναι ταυτοδύναμος, δηλαδή* $(\frac{1}{n}A)^2 = \frac{1}{n}A$.

(2) *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του* $\frac{1}{n}A$.

(3) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας* $\frac{1}{n}A$ *είναι διαγωνοποιήσιμος. Ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;*

Λύση. *Για το πρώτο ερώτημα έχουμε:*

$$(\frac{1}{n}A)^2 = (\frac{1}{n}A)(\frac{1}{n}A) = \frac{1}{n^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{n^2} \begin{pmatrix} n & n & \cdots & n \\ n & n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix} = \frac{1}{n}A$$

και άρα ο πίνακας $\frac{1}{n}A$ *είναι ταυτοδύναμος.*

Έστω λ *μια ιδιοτιμή του πίνακα* $B = \frac{1}{n}A$. *Συνεπώς, υπάρχει ένα μη-μηδενικο διάνυσμα στήλη* X *έτσι ώστε* $BX = \lambda X$. *Αφού* $B^2 = B$ *από το πρώτο ερώτημα, τότε έχουμε:*

$$BX = \lambda X \implies B^2 X = \lambda BX \implies BX = \lambda^2 X \implies \lambda X = \lambda^2 X \implies (\lambda - \lambda^2)X = 0$$

και αφού το $X \neq 0$ *έπεται ότι* $\lambda(1-\lambda) = 0$. *Αντίστροφα εύκολα βλέπουμε ότι πράγματι οι αριθμοί* $0, 1$ *είναι ιδιοτιμές του* B. *Επομένως, ο πίνακας* $B = \frac{1}{n}A$ *έχει ιδιοτιμές:* $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ *με κατάλληλες πολλαπλότητες. Θεωρούμε το πολυώνυμο* $R(t) = t^2 - t$. *Τότε*

$$R(B) = B^2 - B = B - B = 0$$

και άρα το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_B(t)$ *του πίνακα* B *διαιρεί το πολυώνυμο* $R(t)$. *Επομένως, έχουμε:*

$$Q_B(t) \;/\; R(t) \implies Q_B(t) = 1 \quad \text{ή} \quad Q_B(t) = t - 1 \quad \text{ή} \quad Q_B(t) = t(t-1)$$

Όμως το ελάχιστο πολυώνυμο πρέπει να έχει όλες τις ρίζες του χαρακτηριστικού $P_B(t)$. *Άρα*

$$Q_B(x) = t(t-1)$$

και συνεπώς από γνωστό Θεώρημα (βλέπε Θεώρημα 4.6 *στα Θεωρητικά Θέματα: Κεφάλαιο* 1*) έπεται ότι ο πίνακας* $B = \frac{1}{n}A$ *διαγωνοποιείται.* □

Άσκηση 7. *Έστω* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. *Αν η μόνη ιδιοτιμή του* A *είναι η* $\lambda = 0$, *να δειχθεί ότι* $A^n = 0$.

Λύση. *Αφού η μόνη ιδιοτιμή του πίνακα* A *είναι η* $\lambda = 0$ *έπεται ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:* $P_A(t) = t^n$. *Τότε από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε* $P_A(A) = A^n = 0$ *και άρα έχουμε το ζητούμενο.* □

Άσκηση 8. *Θεωρούμε τον πίνακα* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

(1) *Να βρεθεί μη-μηδενικό πολυώνυμο* $Q(t)$ *έτσι ώστε* $Q(A) = 0$.
(2) *Να δείξετε ότι ο* A *είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί πολυώνυμο* $P(t)$ *έτσι ώστε* $P(A) = A^{-1}$.

Λύση. *Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα* A*:*

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & -1 \\ 1 & -t & 1 \\ 4 & -4 & 5-t \end{vmatrix} = \cdots = -t^3 + 6t^2 - 11t + 6$$

και άρα από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε:

$$\begin{aligned} P_A(A) = 0 &\implies -A^3 + 6A^2 - 11A + 6I_3 = 0 \\ &\implies A^3 - 6A^2 + 11A = 6I_3 \\ &\implies A(\frac{1}{6}(A^2 - 6A + 11I_3)) = I_3 \\ &\implies A^{-1} = \frac{1}{6}A^2 - A^2 + \frac{11}{6}I_3 \end{aligned}$$

Επομένως βρήκαμε πολυώνυμα $Q(t) = -t^3 + 6t^2 - 11t + 6$ *και* $P(t) = \frac{1}{6}t^2 - t + \frac{11}{6}$ *έτσι ώστε*

$$Q(A) = 0 \quad \text{και} \quad P(A) = A^{-1}$$

Να σημειώσουμε ότι από τον υπολογισμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $P_A(t) = -t^3+6t^2-11t+6$ *γνωρίζουμε ότι ο πίνακας* A *είναι αντιστρέψιμος διότι* $|A| = 6$, *όπου* 6 *είναι ο σταθερός όρος του πολυωνύμου* $P_A(t)$. □

Άσκηση 9. *Έστω* A *και* B *δύο όμοιοι* $n \times n$ *πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα* $\mathbb{K}$. *Να δείξετε ότι οι πίνακες* A *και* B *έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο:* $Q_A(t) = Q_B(t)$.

Λύση. *Βλέπε Θεωρητικά Θέματα: Κεφάλαιο* 1. □

Άσκηση 10. *Να δείξετε ότι ένας μηδενοδύναμος πίνακας* $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, *δηλαδή* $A^m = \mathbb{O}$, *είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μονο αν* $A = \mathbb{O}$.

Λύση. *Έστω ότι ο μηδενοδύναμος πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος. Τότε γνωρίζουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων. Έστω το πολυώνυμο $Q(t) = t^m$. Τότε έχουμε ότι $Q(A) = A^m = \mathbb{O}$ και άρα*

$$Q_A(t) \,/\, Q(t) \implies Q_A(t) = t^k,\ 1 \leq k \leq m$$

Όμως αφού το $Q_A(t)$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων έπεται ότι $Q_A(t) = t$. Επομένως από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε ότι $A = \mathbb{O}$. Η αντίστροφη κατεύθυνη έπεται άμεσα. $\square$

Άσκηση 11. *Έστω A ένας 4×4 πίνακας πραγματικών αριθμών για τον οποίο ισχύουν τα εξής:*

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

Λύση. *Θεωρούμε το πίνακα*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και θέτουμε:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Εύκολα υπολογίζουμε ότι $|B| = -6 \neq 0$ και άρα ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος. Επομένως το σύνολο $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}_4$ και ιδιαίτερα έχουμε:

$$\begin{cases} E_1 : \text{ ιδιοδιάνυσμα του } A \text{ με αντίστοιχη ιδιοτιμή } \lambda_1 = 0 \text{ αφού } A \cdot E_1 = 0 \cdot E_1 \\[2ex] E_2 : \text{ ιδιοδιάνυσμα του } A \text{ με αντίστοιχη ιδιοτιμή } \lambda_2 = -1 \text{ αφού } A \cdot E_2 = -1 \cdot E_2 \\[2ex] E_3 : \text{ ιδιοδιάνυσμα του } A \text{ με αντίστοιχη ιδιοτιμή } \lambda_3 = 2 \text{ αφού } A \cdot E_3 = 2 \cdot E_3 \\[2ex] E_4 : \text{ ιδιοδιάνυσμα του } A \text{ με αντίστοιχη ιδιοτιμή } \lambda_3 = 2 \text{ αφού } A \cdot E_4 = 2 \cdot E_4 \end{cases}$$

Επειδή η βάση $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του πίνακα A έπεται ότι ο A διαγωνοποιείται. Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$Q_A(t) = t(t+1)(t-2)$$

Τέλος να σημειώσουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το πίνακα A. Πράγματι έχουμε:

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies A = B \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot B^{-1}$$

$$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \square$$

Άσκηση 12. *Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) *Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;*
(2) *Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι άνω τριγωνικός.*

Λύση. *Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A:*

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ 2 & -2-t & 2 \\ 2 & -3 & 2-t \end{vmatrix} = -t \begin{vmatrix} -2-t & 2 \\ -3 & 2-t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2-t \end{vmatrix} = -t^3$$

Επομένως η μόνη ιδιοτιμή του πίνακα A είναι η $\lambda_A = 0$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 3. Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(0)$ λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

και άρα

$$\mathcal{V}(0) = \Big\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \Big\} = \Big\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Big\rangle$$

Επομένως ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται αφού

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(0) = 1 \neq 3 = \text{πολλαπλότητα της ιδιοτιμής } \lambda_A = 0$$

Στη συνέχεια, ακολουθώντας τον αλγόριθμο τριγωνοποίησης όπως αυτός περιγράφεται στα Θεωρητικά Θέματα του Κεφαλαίου 1, θα βρούμε αντιστρέψιμο πίνακα P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι άνω τριγωνικός. Ξεκινάμε πρώτα συμπληρώνοντας το διάνυσμα της βάσης του $\mathcal{V}(0)$ σε μια βάση του $\mathbb{R}_3$. Το σύνολο

$$\mathcal{B}_1 = \Big\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$$

αποτελεί μια βάση του $\mathbb{R}_3$. Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο πίνακα

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος σχηματίστηκε από τις στήλες της βάσης $\mathcal{B}_1$. Τότε

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Αφού ο πίνακας $P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1$ *δεν είναι άνω τριγωνικός συνεχίζουμε τη διαδικασία του αλγόριθμου τριγωνοποίησης. Θεωρούμε το πίνακα*

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

και τότε

$$P_B(t) = \begin{vmatrix} -2-t & 2 \\ -2 & 2-t \end{vmatrix} = t^2$$

Άρα ο πίνακας B *έχει ιδιοτιμή την* $\lambda_B = 0$ *με πολλαπλότητα* 2. *Να σημειώσουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα* B *είναι και ιδιοτιμές του* A, *και άρα η μόνη ιδιοτιμή του* B *είναι πράγματι η* $\lambda_B = 0$ *με αλγεβρική πολλαπλότητα* 2. *Για τον ιδιόχωρο* $\mathcal{V}(0)$ *λύνουμε το ομογενές σύστημα:*

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies y = x$$

και άρα

$$\mathcal{V}(0) = \Big\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \mid x \in \mathbb{R} \Big\} = \Big\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\rangle$$

Συνεπώς ο πίνακας B *δεν διαγωνοποιείται αφού*

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(0) = 1 \neq 2 = \textit{πολλαπλότητα της ιδιοτιμής } \lambda_B = 0$$

και άρα συνεχίζουμε τον αλγόριθμο τριγωνοποίησης, δηλαδή συμπληρώνουμε το διάνυσμα της βάσης του $\mathcal{V}(0)$ *σε μια βάση του* $\mathbb{R}_2$. *Το σύνολο*

$$\mathcal{B}_2 = \Big\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$$

αποτελεί μια βάση του $\mathbb{R}_2$ *και άρα έχουμε τον αντιστρέψιμο πίνακα*

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε υπολογίζουμε:

$$P_2^{-1} \cdot B \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

δηλαδή ο πίνακας $P_2^{-1} \cdot B \cdot P_2$ *είναι άνω τριγωνικός και άρα ο αλγόριθμος τριγωνοποίησης σταματάει. Τέλος υπολογίζουμε την άνω τριγωνική μορφή του πίνακα* A. *Θέτουμε*

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και τότε έχουμε:

$$(P_1 \cdot Q_2)^{-1} \cdot A \cdot (P_1 \cdot Q_2) = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως βρήκαμε αντιστρέψιμο πίνακα $P := P_1 \cdot Q_2$ *έτσι ώστε ο πίνακας* $P^{-1} \cdot A \cdot P$ *να είναι άνω τριγωνικός.* $\square$